信号処理システム特論

相関関数

相関関数

一方の波形を時間軸上で少しずつずらしながら，
両波形間の**類似度**を，ずらした時間(遅れ時間)の関数として表現

【自己相関】
1つの信号波形に対して相関処理を行い，1つの信号波形中に繰り返し(周期性)があるかどうか調べる
例）基本周期(ピッチ周波数)の検出

【相互相関】
異なる2つの信号波形に対して相関処理を行い，2つの波形間の類似度を調べる
例）信号の到達時間差の検出

自己相関関数

連続系の自己相関関数

$$\phi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

T：観測時間

離散系の自己相関関数

$$\phi_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k) \quad n = 0,1,2,\ldots N-1$$

規格化した自己相関関数 $\rho(\tau) = \dfrac{\phi_{xx}(\tau)}{\phi_{xx}(0)}$ ，$-1 \le \rho(\tau) \le 1$

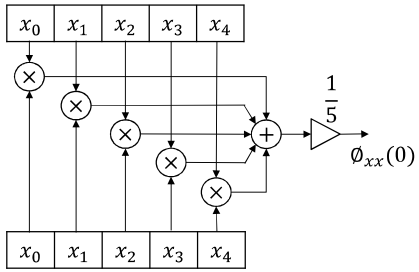
（補足）自己相関関数の計算例

$$\phi_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k) \quad n = 0,1,2,\ldots N-1$$

（データ数5の例：N=5）

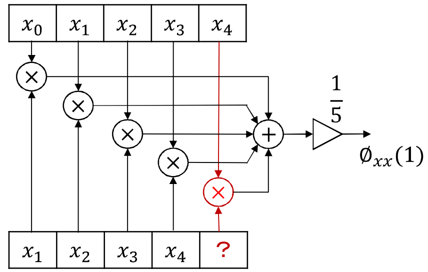
$k = 0$の計算

$$\phi_{xx}(0) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x(n)x(n)$$



$k = 1$の計算

$$\phi_{xx}(1) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x(n)x(n+1)$$



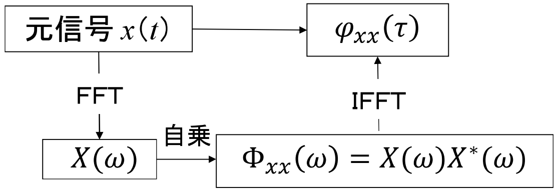
ゼロで埋める
or
x_0を使う

自己相関関数とスペクトル

$$\mathcal{F}[\varphi_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \Phi_{xx}(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\Phi_{xx}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \phi_{xx}(\tau)$$

自己相関関数とスペクトルの関係



データN点の
相関関数の計算量

時間領域：N^2

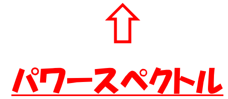
周波数領域（FFTを使うと）：

$N \log N + \alpha$

FFTを使うと高速に実行できる可能性がある。ただし、DFTを使っているので
信号の繰り返し（周期性）を仮定した相関関数の計算になることに注意

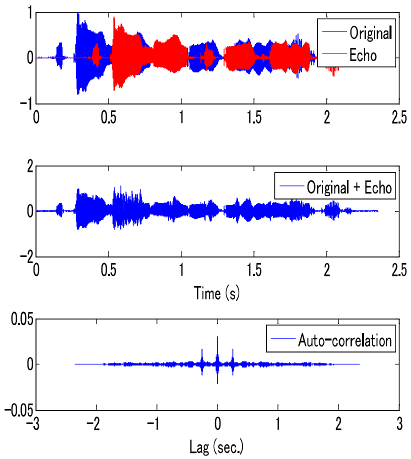
【ウィナー・ヒンチンの定理の証明】

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\varphi_{xx}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \right\} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right\} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ X(\omega) e^{j\omega t} \right\} dt \\
&= X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t} dt = X(\omega)X(-\omega) \\
&= X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 = \Phi_{xx}(\omega)
\end{aligned}$$



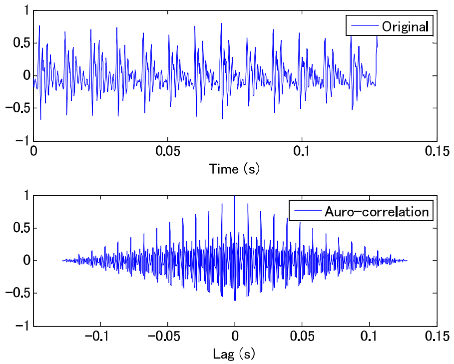
自己相関関数による処理例

エコーの検出



ピッチ検出

「あ」の時間波形



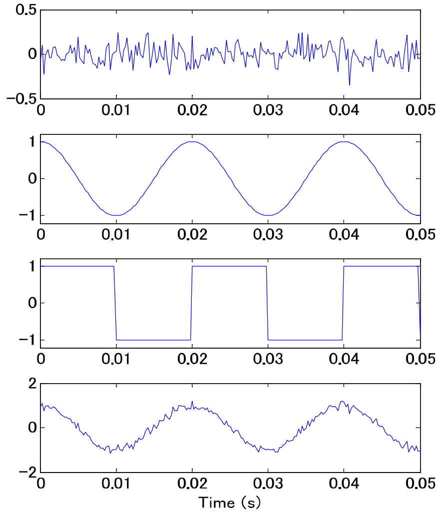
「echo-detection.m」は自己相関を利用したエコー成分の検出，
時間のある時にでも実行してみてください

様々な信号の自己相関関数を調べてみる

サンプルプログラム
「autocorr.m」を用いて

1） ホワイトノイズ、
2） 正弦波、
3） 矩形波、
4） 正弦波＋ホワイトノイズ

の自己相関を調べる。



相互相関関数

異なる2つの信号波形の類似度を測る

連続系の相互相関関数

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt \qquad T:\text{観測時間}$$

離散系の相互相関関数

$$\phi_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+k)$$

クロススペクトル

$X(\omega):x(t)$ のフーリエ変換
$Y(\omega):y(t)$ のフーリエ変換

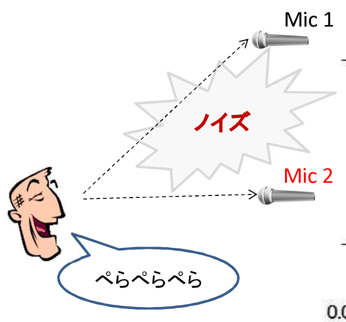
ウィナー・ヒンチンの定理と同様に変換処理すると，次式を得る

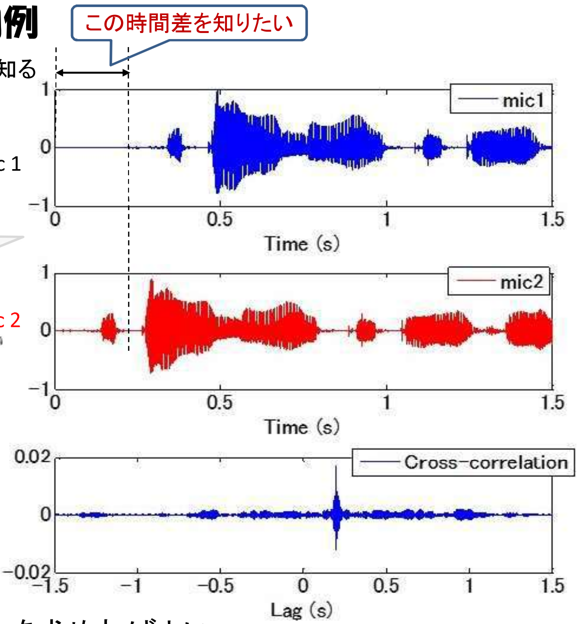
クロススペクトル:

$$\Phi_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt\right\}e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$= X^*(\omega)Y(\omega)$$

相互相関関数の応用例

2つのセンサー信号の時間差を知る





相互相関関数のピークを求めればよい

ノイズを含む信号の相関

$x(t)$がy(t)の一部とする。　　ホワイトノイズを仮定

$$y(t) = x(t-\tau_1) + n(t)$$

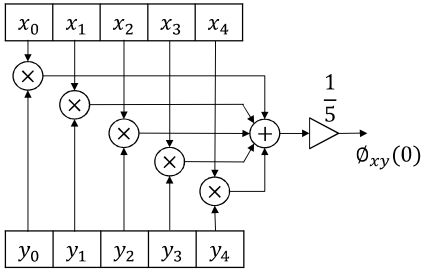
$x(t)$とy(t)の相互相関関数:

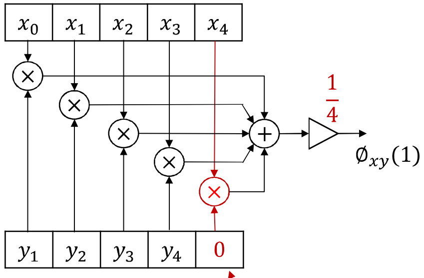
$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xx}(\tau-\tau_1) + \phi_{nx}(\tau) = \phi_{xx}(\tau-\tau_1) \le \phi(0)$$

最大になるのは，$\tau = \tau_1$ のとき

サンプルプログラム「delay_detection.m」を用いて、
信号の時間差を検出してみる。
遅延時間（delay）やホワイトノイズ（w_noise1, w_noise2）の大きさを
変えて色々試してみよう。

自己相関・相互相関の実際の計算(1)





足りないところを
ゼロで埋める

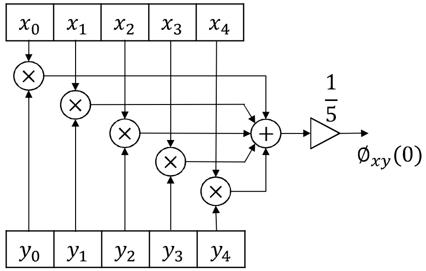
$$\phi_{xx}(k)=\frac{1}{N-|k|}\sum_{n=0}^{N-1}\{x(n)-\bar{x}\}\{x(n+k)-\bar{x}\}$$

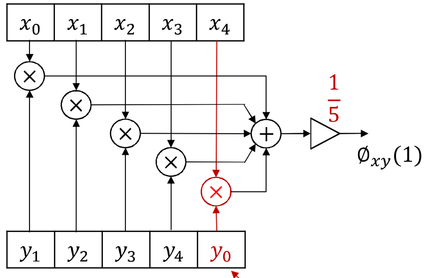
$$\phi_{xy}(k)=\frac{1}{N-|k|}\sum_{n=0}^{N-1}\{x(n)-\bar{x}\}\{y(n+k)-\bar{y}\}$$

$\bar{x} : x(n)$ の平均

$\bar{y} : y(n)$ の平均

自己相関・相互相関の実際の計算(2)





周期性を仮定する

＊FFTを用いた場合は
この計算方法に一致する

$$\phi_{xx}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{x(n)-\bar{x}\}\{x(n+k)-\bar{x}\}$$

$$\phi_{xy}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{x(n)-\bar{x}\}\{y(n+k)-\bar{y}\}$$

(補足)

MATLABの「xcorr」のヘルプを見てみると. . .

c = xcorr(x,y,'option') では、
相互相関の正規化オプションが指定されます。
'option' には、以下の文字列が設定できます。

'biased': 相互相関関数のバイアスのある推定
　　計算法(1)に相当

'unbiased': 相互相関関数のバイアスなしの推定
　　計算法(2)に相当

'coeff': 0 のラグでの自己相関が、完全に 1.0 になるように列を正規化します。

'none': スケーリングされていない生データの相互相関を使用 (既定)